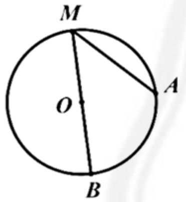
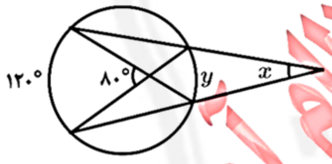
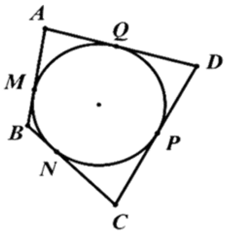
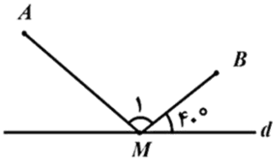
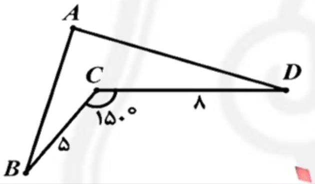
امتحان نوبت دوم هندسه یازدهم ۱۴۰۴

سری ۱

۱	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید. الف) در هر دایره، طول یک کمان، برابر با اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان است. ب) دو دایره به طول شعاع‌های ۳ و ۵ سانتی‌متر و طول خط‌المرکزین ۲ سانتی‌متر، مماس برون هستند. ج) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند. د) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطهٔ ثابت دارد.	۱
۲	در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید. الف) فاصلهٔ مرکز دایره‌ای از یک خط، کمتر از شعاع آن دایره است. این خط و دایره ...... نقطهٔ اشتراک دارند. (یک ، دو) ب) در هر مثلث، نقطهٔ همرسی نیمسازها، مرکز دایرهٔ .... مثلث است. (محیطی ، محاطی) ج) شیب خط در تبدیل .... ، همواره حفظ می‌شود. (انتقال ، دوران) د) دورانی به مرکز O و زاویهٔ .... ، تبدیلی همانی است. (۱۸۰° ، ۳۶۰°)	۱
۳	در شکل زیر O مرکز دایره است. ثابت کنید؛ اندازهٔ زاویهٔ محاطی $\hat{M}$، برابر با نصف اندازهٔ کمان مقابل به آن زاویه است. 	۱٫۲۵
۴	با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید. 	۱
۵	از نقطهٔ P خارج دایره، مماس PT و خط قاطعی نسبت به دایره رسم می‌کنیم. خط قاطع دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید: $PT^{۲} = PA \times PB$	۱٫۲۵
۶	دو دایره متخارج داریم که طول مماس مشترک داخلی و خارجی آنها به ترتیب برابر ۱۰ و ۲۴ سانتی‌متر و طول خط‌المرکزین آن‌ها مساوی ۲۶ سانتی‌متر است. طول شعاع‌های دو دایره را به‌دست آورید.	۱٫۵
۷	مثلثی به طول اضلاع a، b و c با شعاع دایره محاطی داخلی به اندازه r و سه ارتفاع به طول‌های h_a، h_b و h_c را درنظر بگیرید. نشان دهید: $\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$	۱

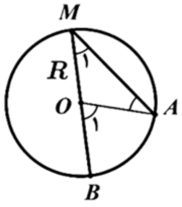
۸	در چهارضلعی محیطی زیر ثابت کنید؛ مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است. 	۱
۹	مطابق شکل، نقطهٔ M را روی خط d چنان درنظر می‌گیریم که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن شود. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{M}_۱$ را به‌دست آورید. 	۰,۵
۱۰	مطابق شکل زیر، نقطه O روی پاره‌خط AB است. ثابت کنید؛ تحت دورانی به مرکز O و هر زاویهٔ حادهٔ $\mathbf{a}$، اندازهٔ پاره‌خط AB با تصویر آن با هم برابرند. 	۱
۱۱	در شکل زیر، می‌خواهیم بدون تغییر طول ضلع‌ها، مساحت شکل را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را به‌دست آورید. ($CD = ۸$، $BC = ۵$ و $B\hat{C}D = ۱۵۰^\circ$) 	۱
۱۲	ثابت کنید، در هر تبدیل طولپا، تبدیل یافتهٔ یک زاویه، زاویه‌ای هم‌اندازهٔ آن است.	۱,۲۵
۱۳	محل برخورد قطرهای مستطیلی را O می‌نامیم. در تجانسی به مرکز O و نسبت $\frac{۲}{۳}$، مساحت بین آن مستطیل و تصویرش برابر ۱۰ است. مساحت مستطیل اولیه را محاسبه کنید.	۱,۲۵
۱۴	در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با شعاع دایره محیطی R می‌دانیم؛ $BC = ۱۰$، $\hat{B} = ۱۳۵^\circ$ و $R = ۱۰$. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و طول ضلع AC را حساب کنید.	۱,۵
۱۵	در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ با فرض $AC = b$، $AB = c$ و $BC = a$، ثابت کنید؛ $\hat{A} > ۹۰^\circ$ اگر و تنها اگر $a^۲ > b^۲ + c^۲$.	۰,۷۵
۱۶	مثلثی به طول اضلاع ۶ ، ۱۰ و ۱۴ را درنظر بگیرید. الف) با استفاده از قضیه کسینوس‌ها، اندازهٔ زاویه مقابل به بزرگ‌ترین ضلع مثلث را محاسبه کنید. ب) به کمک دستور هرون، طول ارتفاع وارد بر کوچک‌ترین ضلع مثلث را به‌دست آورید.	۱ ۱,۲۵
۱۷	در مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ داریم؛ $AB = ۵$، $BC = ۱۲$ و $AC = ۱۵$. طول نیمساز زاویهٔ داخلی $\hat{A}$ را محاسبه کنید.	۱,۵

۱	الف) نادرست صفحه ۱۲ ب) نادرست صفحه ۲۰ ج) درست مشابه تمرین ۲ صفحه ۴۲ د) درست صفحه ۳۶ بارم هر قسمت (۰/۲۵)	۱
۲	الف) دو صفحه ۱۱ ب) محاطی صفحه ۲۵ ج) انتقال صفحه ۳۹ د) ۳۶۰° صفحه ۴۸ بارم هر قسمت (۰/۲۵)	۱

۳ 1.25

روش اول:

مرکز دایره را به نقطهٔ A وصل می‌کنیم.



رسم شکل (۰/۲۵)

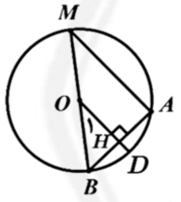
$$OM = OA = R \Rightarrow \hat{M}_{۱} = \hat{A} \quad (۱) \qquad (۰/۲۵)$$

زاویهٔ $\hat{O}_{۱}$ در مثلث $O\overset{\triangle}{A}M$ خارجی است لذا:
$$\underbrace{\hat{O}_{۱} = \hat{M}_{۱} + \hat{A}}_{(۰/۲۵)} \quad (۲)$$

$$(۱)\ ,\ (۲) \Rightarrow \underbrace{\hat{O}_{۱} = ۲\hat{M}_{۱}}_{(۰/۲۵)} \ \underbrace{\Rightarrow \overset{\frown}{BA} = ۲\hat{M}_{۱} \Rightarrow \hat{M}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲}}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

وتر AB و شعاع عمود بر آن را رسم می‌کنیم. درنتیجه



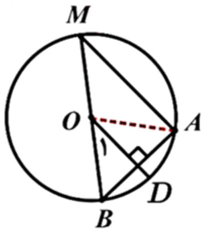
رسم شکل (۰/۲۵)

$$\underbrace{OH \perp AB \Rightarrow BH = AH \quad , \quad \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DA}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c} \dfrac{BO}{BM} = \dfrac{BH}{BA} = \dfrac{۱}{۲} \\ \hat{B} = \hat{B} \end{array}\right\}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{O\overset{\triangle}{B}H \sim M\overset{\triangle}{A}B}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\hat{M} = \hat{O}_{۱} = \overset{\frown}{BD} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}}_{(۰/۲۵)}$$

روش سوم:

وتر AB و شعاع عمود بر آن را رسم می‌کنیم. درنتیجه



رسم شکل (۰/۲۵)

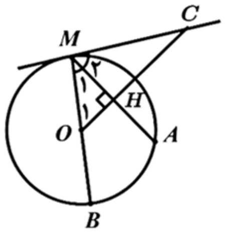
$$OD \perp AB \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DA} \Rightarrow \hat{O}_{۱} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲} \quad (۱) \qquad (۰ / ۲۵)$$

از طرفی چون در مثلث AMB میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است، لذا مثلث قائم‌الزاویه است. (۰ / ۲۵) پس

$$\underbrace{\left.\begin{array}{c} MA \perp AB \\ OD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow MA \parallel OD}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\hat{M} = \hat{O}_{۱} \xrightarrow{(۱)} \hat{M} = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲}}_{(۰/۲۵)}$$

روش چهارم:

از نقطه M خطی بر دایره، مماس می‌کنیم. همچنین، از نقطه O به وتر AM عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط مماس را در نقطه C قطع کند. درنتیجه



رسم شکل (۰/۲۵)

$$\left.\begin{array}{l}\underbrace{OH \perp AM \Rightarrow O_۱ = \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲}}_{(۰/۲۵)} \\ \underbrace{O_۱ + M_۱ = M_۲ + M_۱ = ۹۰^\circ \Rightarrow M_۲ = O_۱}_{(۰/۲۵)} \\ \underbrace{M_۱ + M_۲ = ۹۰^\circ = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AM}}{۲}}_{(۰/۲۵)}\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{M_۱ + \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{AM}}{۲} \Rightarrow M_۱ = \frac{\overset{\frown}{BA}}{۲}}_{(۰/۲۵)}$$

قضیه صفحه ۱۴

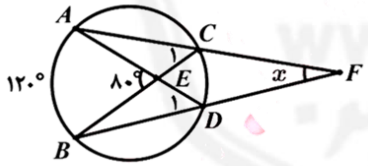
۴

روش اول:

$$\underbrace{\frac{۱۲۰^\circ + y}{۲} = ۸۰^\circ}_{(۰/۲۵)} \quad , \quad \underbrace{\frac{۱۲۰ - y}{۲} = x}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{y = ۴۰^\circ}_{(۰/۲۵)} \; , \; \underbrace{x = ۴۰^\circ}_{(۰/۲۵)}$$

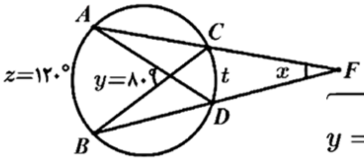
روش دوم: با استفاده از ویژگی‌های زاویه محاطی و زاویه خارجی داریم:

$$\overbrace{۸۰^\circ = \hat{C}_۱ + \hat{A} = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = ۲۰^\circ}^{(۰/۲۵)} \quad (*)$$



$$\left.\begin{array}{l}\overbrace{\hat{D}_۱ = \frac{۱۲۰^\circ}{۲} = ۶۰^\circ}^{(۰/۲۵)} \\ \underbrace{\hat{D}_۱ = \hat{A} + x \overset{(*)}{=} ۲۰^\circ + x}_{(۰/۲۵)}\end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{x = ۴۰^\circ}^{(۰/۲۵)}$$

روش سوم:



$$\overbrace{y = \frac{z+t}{۲} \; , \; x = \frac{z-t}{۲}}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{x + y = z}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{x + ۸۰^\circ = ۱۲۰^\circ}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{x = ۴۰^\circ}^{(۰/۲۵)}$$

تذکر: درصورت به‌دست آوردن جواب به کمک رابطهٔ $x + y = z$ بدون اثبات، فقط (۰/۵) نمره تعلق گیرد.

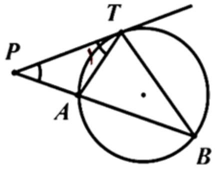
مشابه تمرین ۲ صفحه ۱۶

۱

۵ — ۱.۲۵

روش اول:

از نقطهٔ T به A و B وصل می‌کنیم.

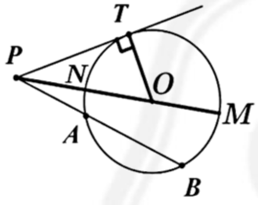


رسم شکل (۰/۲۵)

$$\begin{cases}\widehat{P}=\widehat{P} & (۰/۲۵)\\ \widehat{T}_۱=\widehat{B}=\dfrac{\widehat{TA}}{۲} & (۰/۲۵)\end{cases}\Rightarrow \underbrace{P\overset{\triangle}{A}T\sim P\overset{\triangle}{B}T}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow \underbrace{\frac{PT}{PA}=\frac{PB}{PT}\Rightarrow PT^{۲}=PA\times PB}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

نقطهٔ P را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. سپس نقاط برخورد با دایره را M و N می‌نامیم. قرار می‌دهیم $OP = d$. پس



رسم شکل (۰/۲۵)

$$\overbrace{PN\times PM=PA\times PB\Rightarrow (d-R)(d+R)=PA\times PB}^{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{PA\times PB=d^{۲}-R^{۲}}_{(۰/۲۵)}\quad (۱)$$

از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OPT}$ داریم

$$\overbrace{OT^{۲}+PT^{۲}=OP^{۲}\Rightarrow PT^{۲}=d^{۲}-R^{۲}}^{(۰/۲۵)}\quad (۲)$$

بنابر روابط (۱) و (۲) داریم $PT^{۲}=PA\times PB$. (۰/۲۵)

(درصورتی‌که PA از مرکز بگذرد، اثبات به روش مشابه برقرار است)

قضیه صفحه ۱۹

۶ — ۱.۵

فرض کنیم طول خط‌المرکزین دو دایره برابر d و طول شعاع‌های آنها R و R' باشد. ($R > R'$)

$$\underbrace{\sqrt{d^{۲}-(R-R')^{۲}}}_{(۰/۲۵)}= \text{طول مماس مشترک خارجی} \quad \text{و} \quad \underbrace{\sqrt{d^{۲}-(R+R')^{۲}}}_{(۰/۲۵)}= \text{طول مماس مشترک داخلی}$$

درنتیجه

$$\underbrace{۲۴^{۲}=۲۶^{۲}-(R-R')^{۲}}_{(۰/۲۵)} \quad \text{و} \quad \underbrace{۱۰^{۲}=۲۶^{۲}-(R+R')^{۲}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow R+R'=۲۴\ ,\quad R-R'=۱۰\Rightarrow \underbrace{R=۱۷\ ,\ R'=۷}_{(۰/۵)}$$

مشابه تمرین ۵ صفحه ۲۳

۷

روش اول:

$$\underbrace{S=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲S}}_{(۰/۲۵)} \quad (۱)$$

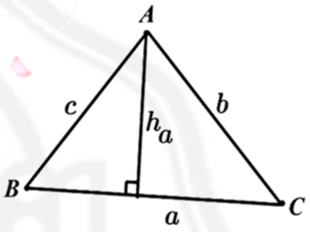
به طور مشابه

$$\underbrace{\frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲S} \quad , \quad \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲S}}_{(۰/۲۵)} \quad (۲)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۲P}{۲S}=\frac{۱}{r}}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

با توجه به شکل داریم



$$\underbrace{h_a=c\sin B \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{۱}{c\sin B}}_{(۰/۲۵)} \quad (۱)$$

به طور مشابه

$$\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{b\sin A} \quad , \quad \frac{۱}{h_b}=\frac{۱}{a\sin C} \quad (۲)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{c\sin B}+\frac{۱}{a\sin C}+\frac{۱}{b\sin A}}_{(۰/۲۵)}$$

$$=\underbrace{\frac{a}{ca\sin B}+\frac{b}{ab\sin C}+\frac{c}{bc\sin A}}_{(۰/۲۵)}$$

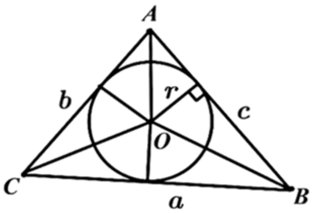
$$=\underbrace{\frac{a}{۲S}+\frac{b}{۲S}+\frac{c}{۲S}=\frac{۲P}{۲S}=\frac{P}{S}=\frac{۱}{r}}_{(۰/۲۵)}$$

روش سوم: ابتدا دایره محاطی داخلی مثلث را رسم می‌کنیم. حال با توجه به شکل داریم:

$$\underbrace{S_{OBC}+S_{OAC}+S_{OAB}=S_{ABC}}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}ar+\frac{۱}{۲}br+\frac{۱}{۲}cr=S=\frac{۱}{۲}ah_a$$

$$\Rightarrow h_a=\underbrace{\frac{ar+br+cr}{a}=\frac{۲rP}{a}\Rightarrow\frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲rP}}_{(۰/۲۵)} \quad (۱)$$

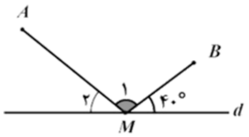


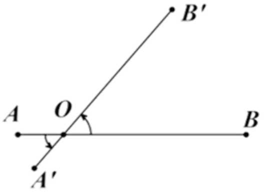
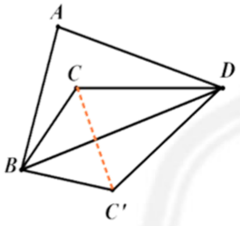
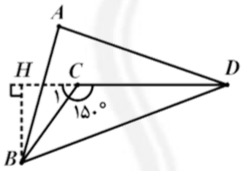
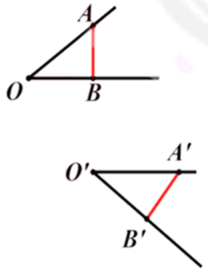
به طور مشابه

$$\frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲rP} \quad , \quad \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲rP} \quad (۲)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{(۱),(۲)}\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲rP}+\frac{b}{۲rP}+\frac{c}{۲rP}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۲P}{۲rP}=\frac{۱}{r}}_{(۰/۲۵)}$$

۱

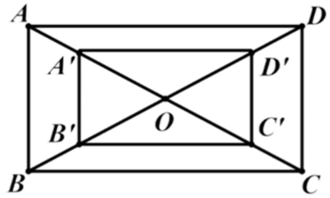
	روش چهارم: $\underbrace{S=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow rP=\frac{۱}{۲}ah_a \Rightarrow \frac{۱}{h_a}=\frac{a}{۲rP}}_{(۰/۲۵)}$ (۱) به طور مشابه $\underbrace{\frac{۱}{h_c}=\frac{c}{۲rP} \quad , \quad \frac{۱}{h_b}=\frac{b}{۲rP}}_{(۰/۲۵)}$ (۲) $\underbrace{\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{a}{۲rP}+\frac{b}{۲rP}+\frac{c}{۲rP}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۲P}{۲rP}=\frac{۱}{r}}_{(۰/۲۵)}$ روش پنجم: فرض کنیم R شعاع دایره محیطی مثلث باشد. پس $\left.\begin{array}{l}\underbrace{S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ab(\frac{c}{۲R})=\frac{abc}{۴R}}_{(۰/۲۵)} \\ S=\frac{۱}{۲}ah_a\end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{۱}{h_a}=\frac{۲R}{bc} \ , \ abc=۴RS}_{(۰/۲۵)}$ (۱) به طور مشابه $\frac{۱}{h_c}=\frac{۲R}{ab} \quad , \quad \frac{۱}{h_b}=\frac{۲R}{ac}$ (۲) $\underbrace{\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۲R}{bc}+\frac{۲R}{ac}+\frac{۲R}{ba}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۲R(a+b+c)}{abc}=\frac{۴RP}{۴RS}=\frac{۱}{r}}_{(۰/۲۵)}$ تمرین ۵ صفحه ۳۰	
۸	روش اول: $\underbrace{AB+CD=(AM+BM)+(DP+CP)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{(AQ+BN)+(DQ+CN)}_{(۰/۲۵)}$ $=\underbrace{(AQ+DQ)+(BN+CN)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{AD+BC}_{(۰/۲۵)}$ روش دوم: $AM=AQ=x \ , \ QD=DP=y \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}MB=BN=AB-x \\ PC=NC=DC-y\end{array}\right.$ (۰/۵) $\Rightarrow \underbrace{AD+CB=(x+y)+(AB-x+CD-y)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{AB+CD}_{(۰/۲۵)}$ قضیه صفحه ۲۷	۱
۹	 $\underbrace{\hat{M}_۲=۴۰^\circ}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\hat{M}_۱=۱۰۰^\circ}_{(۰/۲۵)}$ نتیجه سوال صفحه ۵۲	۰.۵

۱۰	اگر T یک دوران به مرکز O و زاویه α باشد، با توجه به شکل تحت T داریم: $\underbrace{T(A)=A' \quad , \quad T(B)=B'}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{OA=OA' \quad , \quad OB=OB'}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \underbrace{AB=OA+OB=OA'+OB'=A'B'}_{(۰/۲۵)}$  رسم شکل (۰/۲۵) تذکر: به جواب مسأله، با رسم شکل و به صورت نوشتار فارسی به طور کامل، نیز نمره کامل داده شود. قضیه صفحه ۴۱	۱
۱۱	روش اول: ابتدا بازتاب نقطه C را تحت BD به‌دست می‌آوریم و آن را C' می‌نامیم. بنابراین میزان افزایش مساحت برابر است با: $\underbrace{S_{BC'DC}=۲S_{BDC}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۲(\frac{۱}{۲}CB\times CD\sin C)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۵\times ۸\times \frac{۱}{۲}=۲۰}_{(۰/۲۵)}$  رسم شکل (۰/۲۵) روش دوم: ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. $\hat{C}_1=۳۰^\circ$ لذا $BH=\frac{۱}{۲}BC=\frac{۵}{۲}$.(۰/۲۵) بنابراین میزان افزایش مساحت برابر است با: $\underbrace{۲S_{BDC}=۲(\frac{۱}{۲}BH\times CD)}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{۲(\frac{۱}{۲}\times\frac{۵}{۲}\times ۸)=۲۰}_{(۰/۲۵)}$  رسم شکل (۰/۲۵) مشابه تمرین ۵ صفحه ۵۴	۱
۱۲	فرض کنیم T یک تبدیل طولپا باشد. در این صورت با توجه به شکل تحت T داریم $\underbrace{T(O)=O' \quad , \quad T(A)=A' \quad , \quad T(B)=B'}_{(۰/۲۵)}$ درنتیجه پاره‌خط‌های OA، OB و AB به ترتیب به پاره‌خط‌های $O'A'$، $O'B'$ و $A'B'$ تصویر می‌شود. (۰/۲۵) چون تبدیل طولپاست داریم: $\underbrace{OA=OA' \quad , \quad OB=OB' \quad , \quad AB=A'B'}_{(۰/۲۵)}$ $\Rightarrow \underbrace{\overset{\Delta}{AOB}\cong \overset{\Delta}{A'O'B'} \Rightarrow \hat{O}=\hat{O'}}_{(۰/۲۵)}$ قضیه صفحه ۳۵  رسم تصویر زاویه (۰/۲۵) تذکر: به جواب مسأله، با رسم شکل و به صورت نوشتار فارسی به طور کامل، نیز نمره کامل داده شود.	۱.۲۵

۱۳

۱.۲۵

روش اول: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد داریم:



رسم شکل (۰/۲۵)

$$\underbrace{S-S'=۱۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{S-\frac{۴}{۹}S=۱۰}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{S=۱۸}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد داریم:

$$\underbrace{S-S'=۱۰}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{AB\times AD-A'B'\times A'D'=AB\times AD-\frac{۲}{۳}AB\times\frac{۲}{۳}AD=۱۰}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{S=AB\times AD=۱۸}_{(۰/۲۵)}$$

رسم شکل (۰/۲۵)

روش سوم: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد داریم:

$$\underbrace{\frac{S'}{S}=k^۲=(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۴}{۹}}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{S-S'}{S}=\frac{۵}{۹}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{۱۰}{S}=\frac{۵}{۹}\Rightarrow S=۱۸}_{(۰/۲۵)}$$

رسم شکل (۰/۲۵)

روش چهارم: فرض کنیم S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشند و α یکی از زاویه‌های بین دو قطر مستطیل باشد. می‌دانیم در هر مثلث میانه، مثلث را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند بنابراین:

$$\underbrace{S-S'=۱۰\Rightarrow ۴S_{OAB}-۴S_{OA'B'}=۱۰}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{۴(\frac{۱}{۲}OA\times OB\times\sin\alpha)-۴(\frac{۱}{۲}OA'\times OB'\times\sin\alpha)=۱۰}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{OA\times OB\times\sin\alpha-\frac{۴}{۹}OA\times OB\times\sin\alpha=۵\Rightarrow OA\times OB\times\sin\alpha=۹}_{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow S=۴(\frac{۱}{۲}\times OA\times OB\times\sin\alpha)=۱۸ \quad (۰ / ۲۵)$$

رسم شکل (۰/۲۵)

مشابه تمرین ۳ صفحه ۴۹

۱۴

1.5

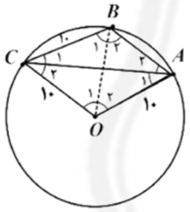
روش اول:

$$\overbrace{\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=۲R}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \overbrace{\frac{۱۰}{\sin A}=\frac{AC}{\sin ۱۳۵}=۲\times ۱۰}^{(۰/۲۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{\sin A=\frac{۱}{۲}}^{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{A=۱۵۰^\circ \quad \vee \quad A=۳۰^\circ \text{ ق ق}}_{(۰/۵)} \\ \overbrace{AC=۲۰\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱۰\sqrt{۲}}^{(۰/۲۵)} \end{cases}$$

روش دوم:

دایره محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. مطابق شکل داریم:



$$OA=OC=OB=CB=۱۰$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \overset{\triangle}{COB}: O_۱=B_۱=۶۰^\circ \quad (۱) \\ B_۱+B_۲=۱۳۵^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow B_۲=۷۵^\circ \qquad (۰/۲۵)$$

$$\overset{\triangle}{AOB}: A_۱+A_۲=B_۲=۷۵^\circ \Rightarrow O_۲=۳۰^\circ \quad (۲) \qquad (۰/۲۵)$$

$$\overset{(۱),(۲)}{\Rightarrow} A\hat{O}C=۹۰^\circ \Rightarrow CA^۲=۱۰^۲+۱۰^۲ \Rightarrow CA=۱۰\sqrt{۲} \qquad (۰/۵)$$

$$A\hat{O}C=۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\triangle}{COA}: C_۲=A_۱=۴۵^\circ \Rightarrow A_۲=۳۰^\circ \qquad (۰/۵)$$

روش سوم:

در مثلث ABC، اگر $AB=c \;,\; AC=b \;,\; BC=a=۱۰$ و با فرض این‌که S مساحت مثلث باشد داریم:

$$\underbrace{S=\frac{۱}{۲}ac\sin B \Rightarrow S=\frac{۱}{۲}\times ۱۰\times c\times \sin ۱۳۵^\circ=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}c}_{(۰/۲۵)} \quad (۱)$$

$$\underbrace{S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ab(\frac{c}{۲R})=\frac{abc}{۴R} \Rightarrow R=\frac{abc}{۴S}}_{(۰/۲۵)} \overset{(۱)}{\Rightarrow} \overbrace{۱۰=\frac{۱۰bc}{۴\times\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}c} \Rightarrow AC=b=۱۰\sqrt{۲}}^{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{S=\frac{۱}{۲}bc\sin \hat{A}=\frac{۵\sqrt{۲}}{۲}c \Rightarrow \sin A=\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\hat{A}=۱۵۰^\circ \quad \vee \quad \hat{A}=۳۰^\circ \text{ ق ق}}_{(۰/۵)}$$

مشابه مثال ۱ صفحه ۶۲

۱۵

۰.۷۵

روش اول:

$$\underbrace{a^۲ > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow b^۲ + c^۲ - ۲bc\cos A > b^۲ + c^۲}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{-۲bc\cos A > ۰}_{(۰/۲۵)} \Leftrightarrow \underbrace{\cos A < ۰ \Leftrightarrow A > ۹۰^\circ}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:

فرض کنیم R شعاع دایره محیطی مثلث باشد. درنتیجه:

$$a^۲ > b^۲ + c^۲ \Leftrightarrow ۴R^۲\sin^۲ A > ۴R^۲\sin^۲ B + ۴R^۲\sin^۲ C \qquad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow \sin^۲ A > \sin^۲ B + \sin^۲ C \Leftrightarrow \sin^۲(B+C) > \sin^۲ B + \sin^۲ C$$

$$\Leftrightarrow \sin^۲ B\cos^۲ C + \cos^۲ B\sin^۲ C + ۲\sin B\cos B\sin C\cos C > \sin^۲ B + \sin^۲ C$$

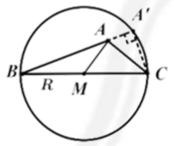
$$\Leftrightarrow \sin^۲ B(\cos^۲ C - ۱) + \sin^۲ C(\cos^۲ B - ۱) + ۲\sin B\cos B\sin C\cos C > ۰ \qquad (۰/۲۵)$$

$$\Leftrightarrow \sin^۲ B(-\sin^۲ C) + \sin^۲ C(-\sin^۲ B) + ۲\sin B\cos B\sin C\cos C > ۰$$

$$\Leftrightarrow \cos B\cos C > \sin B\sin C \Leftrightarrow \cos B\cos C - \sin B\sin C > ۰$$

$$\Leftrightarrow \cos(B+C) > ۰ \Leftrightarrow B + C < ۹۰^\circ \Leftrightarrow A > ۹۰^\circ \qquad (۰/۲۵)$$

روش سوم:



با توجه به شکل اگر $BC = a\ ,\ AM = m_a$ ابتدا ثابت می‌کنیم:

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow m_a < \frac{a}{۲}$$

دایره‌ای به قطر BC و به مرکز M وسط ضلع BC می‌زنیم. با توجه به شکل و ویژگی‌های زاویهٔ خارجی داریم:

$$(۰/۲۵) \qquad ۲m_a < a \overset{a=۲R}{\Leftrightarrow} m_a < R \Leftrightarrow (\text{نقطهٔ } A \text{ درون دایره باشد}) \Leftrightarrow \hat{A} > ۹۰^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{A} > ۹۰^\circ \Leftrightarrow \underbrace{m_a < \frac{a}{۲} \Leftrightarrow m_a^۲ < \frac{a^۲}{۴} \Leftrightarrow ۲m_a^۲ < \frac{a^۲}{۲} \Leftrightarrow ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} < a^۲ \Leftrightarrow b^۲ + c^۲ < a^۲}_{(۰/۵)}$$

تمرین ۹ قسمت ب صفحه ۷۴

۱۶

۱

الف) فرض کنیم $a = ۶\ ,\ b = ۱۰\ ,\ c = ۱۴$.

$$\underbrace{c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ab\cos C \Rightarrow ۱۴^۲ = ۶^۲ + ۱۰^۲ - ۲(۶)(۱۰)\cos C}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{\cos C = -\frac{۱}{۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{C = ۱۲۰^\circ}_{(۰/۲۵)}$$

مشابه کار در کلاس ۲ صفحه ۶۵

ب)

۱.۲۵

$$P = \frac{۶ + ۱۰ + ۱۴}{۲} = ۱۵ \qquad (۰/۲۵)$$

$$\underbrace{S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{۱۵\times۹\times۵\times۱}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{۱۵\sqrt{۳}}_{(۰/۲۵)} \quad , \quad \underbrace{S = \frac{۱}{۲}\times۶\times h_a = ۱۵\sqrt{۳}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{h_a = ۵\sqrt{۳}}_{(۰/۲۵)}$$

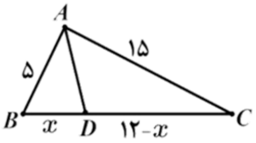
مشابه مثال صفحه ۷۱

۱۷

1.5

روش اول:

با فرض $BD = x$ داریم $DC = ۱۲ - x$ درنتیجه



$$\underbrace{\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{۵}{x} = \frac{۱۵}{۱۲ - x}}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{x = ۳ \Rightarrow BD = ۳ \ , \ \ DC = ۹}_{(۰/۲۵)}$$

$$\underbrace{AD^{۲} = AB \times AC - BD \times DC = ۵ \times ۱۵ - ۳ \times ۹ = ۴۸}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{AD = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}}_{(۰/۲۵)}$$

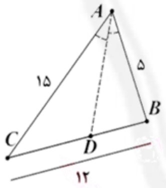
توجه: برای به‌دست آوردن BD , DC روش‌های زیر قابل قبول است:

$$\underbrace{BD = \frac{۱۲ \times ۵}{۱۵ + ۵} = ۳}_{(۰/۵)} \Rightarrow \underbrace{CD = ۹}_{(۰/۲۵)}$$

یا

$$\underbrace{\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC + AB} = \frac{BD}{DC + BD}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{\frac{۵}{۲۰} = \frac{BD}{۱۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow \underbrace{BD = ۳ \ , \ DC = ۹}_{(۰/۲۵)}$$

روش دوم:



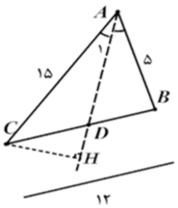
$$۱۲^{۲} = ۱۵^{۲} + ۵^{۲} - ۲ \times ۱۵ \times ۵ \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{۵۳}{۷۵} \qquad (۰ / ۲۵)$$

$$\Rightarrow \cos^{۲}(\frac{A}{۲}) = \frac{۱ + \cos A}{۲} = \frac{۱ + \frac{۵۳}{۷۵}}{۲} \Rightarrow \cos(\frac{A}{۲}) = \frac{۸}{۵\sqrt{۳}} \qquad (۰ / ۲۵)$$

$$AD = d_a = \frac{۲bc\cos(\frac{A}{۲})}{b + c} = \frac{۲ \times ۵ \times ۱۵ \times \frac{۸}{۵\sqrt{۳}}}{۱۵ + ۵} = ۴\sqrt{۳} \qquad (۱)$$

روش سوم:

$$۱۲^{۲} = ۱۵^{۲} + ۵^{۲} - ۲ \times ۱۵ \times ۵ \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{۵۳}{۷۵} \qquad (۰ / ۲۵)$$



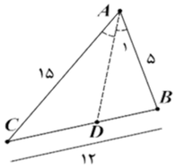
$$\sin^{۲} \hat{A}_{۱} = \frac{۱ - \cos \hat{A}}{۲} = \frac{۱۱}{۷۵} \Rightarrow \sin \hat{A}_{۱} = \frac{\sqrt{۳۳}}{۱۵} \Rightarrow CH = \sqrt{۳۳} \qquad (۰ / ۵)$$

$$S_{ABC} = \sqrt{P(P - a)(P - b)(P - c)} = ۸\sqrt{۱۱} \qquad (۰ / ۲۵)$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{۵}{۱۵} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{۲۰}{۱۵} \Rightarrow S_{ADC} = ۶\sqrt{۱۱} \qquad (۰ / ۲۵)$$

$$S_{ADC} = ۶\sqrt{۱۱} = \frac{۱}{۲} AD \times CH \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۳} \qquad (۰ / ۲۵)$$

روش چهارم:



$$۱۲^۲ = ۱۵^۲ + ۵^۲ - ۲ \times ۱۵ \times ۵ \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{۵۳}{۷۵} \qquad (۰ / ۲۵)$$

$$\sin^۲ \hat{A}_۱ = \frac{۱ - \cos \hat{A}}{۲} = \frac{۱۱}{۷۵} \Rightarrow \sin \hat{A}_۱ = \frac{\sqrt{۳۳}}{۱۵} \qquad (۰ / ۲۵)$$

$$\cos B = \frac{۲۰+۱۴۴-۲۲۵}{۱۲۰} = -\frac{۷}{۱۵} \Rightarrow \sin B = \frac{۴\sqrt{۱۱}}{۱۵} \qquad (۰ / ۵)$$

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \hat{A}_۱} \Rightarrow \frac{AD}{\frac{۴\sqrt{۱۱}}{۱۵}} = \frac{۳}{\frac{\sqrt{۳۳}}{۱۵}} \Rightarrow AD = ۴\sqrt{۳} \qquad (۰ / ۵)$$

روش پنجم:

در مثلث ABC، اگر $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ و با فرض این‌که S مساحت و $۲P$ محیط مثلث باشد داریم:

$$\underbrace{AD^۲ = AB \times AC - BD \times DC = bc - \frac{ac}{b+c} \times \frac{ab}{b+c}}_{(۰/۵)} = \frac{bc((b+c)^۲ - a^۲)}{(b+c)^۲} =$$

$$\underbrace{\frac{bc(۲P - ۲a)(۲P)}{(b+c)^۲} = \frac{۴bcP(P-a)}{(b+c)^۲}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow AD = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcP(P-a)}$$

$$\underbrace{AD = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcP(P-a)} = \frac{۲}{۲۰}\sqrt{۱۶ \times ۵ \times ۱۵ \times ۴}}_{(۰/۵)} \underbrace{= ۴\sqrt{۳}}_{(۰/۲۵)}$$

تذکر: در صورت عدم اثبات فرمول فوق، فقط نمره خط آخر یعنی (۰ / ۷۵)منظور گردد.

مشابه تمرین ۲ صفحه ۷۰